計算幾何学
Computational Geometry

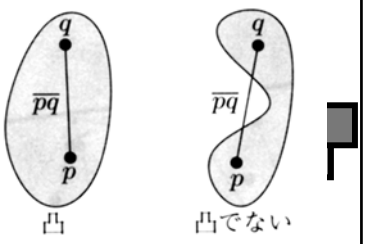
会津大学

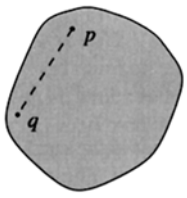
第三章　凸包
Convex Hull

凸集合(Convex Set)

会津大学

- 平面上に与えられるn個の点の集合S_nに対して、任意2点p, qの線分がS_nに完全に含まれる。



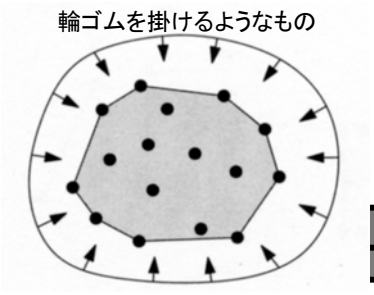


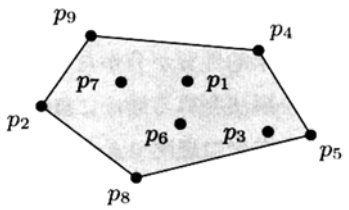
A convex set

A nonconvex set

凸包(Convex Hull)の定義と表現

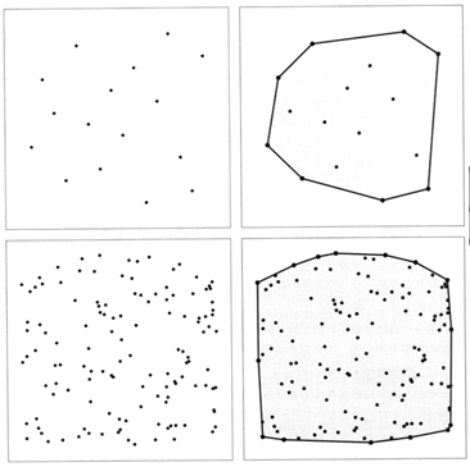
- 平面上に与えられるn個の点$p_i(i=1,2,\ldots,n)$の集合S_nに対し、S_nを含む最小の凸多角形→S_nの凸包$\mathcal{CH}(S_n)$
- 実例
  - 入力としての点集合
    $S_n=p_1, p_2, \ldots, p_9$
  - 出力としての凸包
    $\mathcal{CH}(S_n)=p_4, p_5, p_8, p_2, p_9$





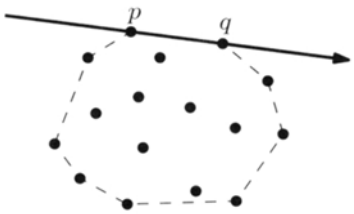
計算方法

- 直接法
- 包装法
- Graham走査法
- 逐次添加法
- 分割統治法
- Quick法
- 内点消去法
  （前処理）

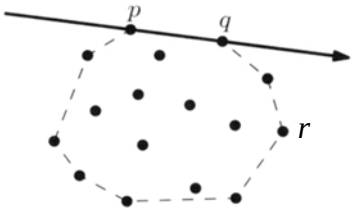


直接法(Direct method)

- 点の集合S_nから任意2点p,qを取り出し、その線分が凸包の多角形の辺であるかどうかを判定する
- 他のn-2個の点が全てp,qを通る直線の片側（右又は左）にある時→線分$\overline{pq}$が凸包の辺
- $n(n-1)/2$組点対



アルゴリズム



DirectConvexHull(S_n)

- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：**時計回り**の順に$\mathcal{CH}(S_n)$の頂点を含むリスト$\mathcal{L}$

1. 辺集合初期化$E \leftarrow 0$
2. for 全ての点対p,q in S_n、但し、$p \neq q$
3. do $valid \leftarrow$ **true**
4. for p,q以外全ての点r
5. do if rが$\overrightarrow{pq}$ の**左側**にある
6. then $valid \leftarrow$ **false**
7. if $valid$ then $\overrightarrow{pq}$ をEに追加
8. Eを時計回り順にして$\mathcal{L}$を構成する

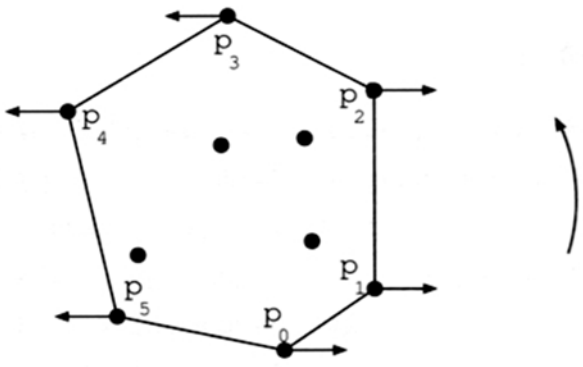
逆時計回りの場合
→右側

計算量

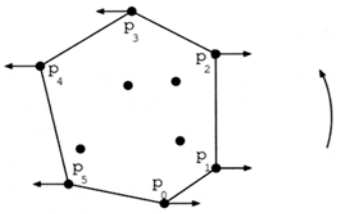
- 点集合のデータ数＝n
- 辺の組み合わせ数＝$n(n\text{-}1)/2=O(n^2)$
- 一つの辺に対して、n-2個の三角形処理 $=O(n)$
- 総計算量＝$O(n^3)$

包装法(Wrapping method)

- 凸包の既存の頂点から出発して、順次に次の頂点を探索していく



アルゴリズム



WrappingConvexHull(S_n)

- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：$\mathcal{CH}(S_n)$の頂点を含むリスト$\mathcal{L}$

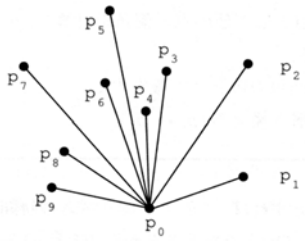
1. 最小のy座標を持つ点p_0を見つける
2. $\mathcal{L}$にp_0を追加する
3. for 全ての点q in S_n、但し、$q \notin \mathcal{L}$
4. $\mathcal{L}$(top)を原点としてqとの偏角を計算する
5. 最小偏角を持つ点q_{min}を探索する
6. q_{min}を$\mathcal{L}$に追加する
7. if $q_{min} \neq p_0$ then goto step 3 else return $\mathcal{L}$

計算量

- 点集合のデータ数＝n、頂点数＝h
- 最初の頂点p_0を探索する計算量＝$O(n)$
- 一つの頂点と残り未処理の点の最小偏角を探索する計算量＝$O(n)$
- 総計算量＝ $O(n)+O(hn)=O(hn)$
- 最悪の場合 $\rightarrow h=n \rightarrow O(n^2)$

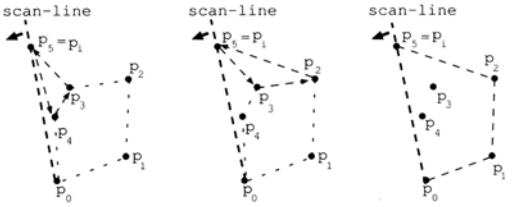
Graham走査法(Graham scan)

- 最小のy座標を持つ点p_0を見つける
- p_0と他の点で構成された線分の偏角を求める
- 偏角の昇順で点集を並び替える
- p_0とp_1が凸包の頂点→スタックSに挿入
- p_2から各点を順次に調べる
- p_i≠頂点→除去する
- How to…?



Graham走査法続き

- 点p_iを加える時、$S[top\text{-}1]$, $S[top]$, p_iから構成される三角形≠逆時計回り
- $S[top]$をSから取り出し、除去する
- 上記の三角形＝逆時計回りになるまで繰返す
- p_iをSに入れる
- 例：i=5の時



アルゴリズム

GrahamConvexHull(S_n)

- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：$\mathcal{CH}(S_n)$の頂点を含むスタックS

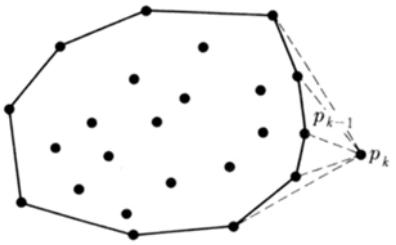
1. 最小のy座標を持つ点p_0を見つける
2. p_0と他の点で構成された線分の偏角の昇順に並び替え、$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$
3. p_0, $p_1 \rightarrow S$
4. for i=2 to n-1 do
5. while △(S[top-1], S[top], p_i)＝時計回り do
6. pop(S[top])
7. push(p_i)

計算量

- 点集合のデータ数＝n
- 最初の頂点p_0を探索する計算量＝$O(n)$
- 偏角の並び替え計算量＝$O(n\log n)$
- スタックへの点の追加と削除＝$O(n)$
- 総計算量＝$O(n)+O(n\log n)+O(n)=O(n\log n)$

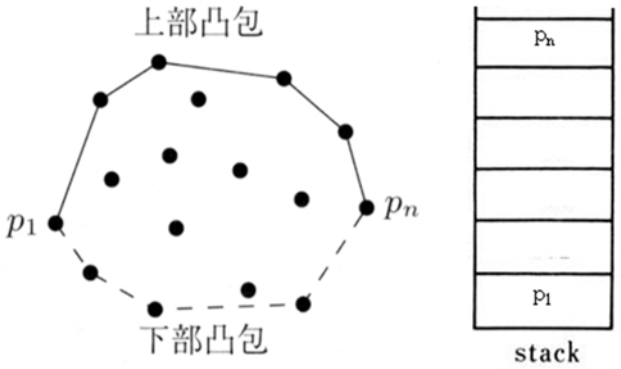
逐次添加法(Incremental method)

- 点集をx座標で昇順に並び替える
- 最初の3点で凸包を構成する
- 残りの点を1点ずつ加えながら、凸包を更新していく
- 新しい点p_kを加える時に、p_k から凸包への2本接線（？）を求め、凸包の辺とする。接線に挟まれる凸包の境界線を取り除く



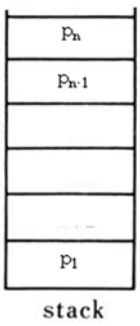
上・下側境界線

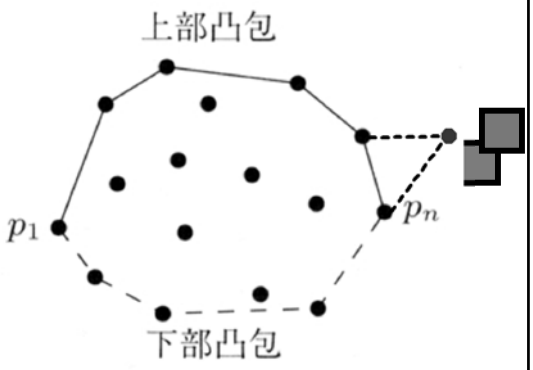
- p_1とp_n必ず存在する
- p_1とp_nは凸包の境界線を上・下側境界線に分ける



接線の求め方

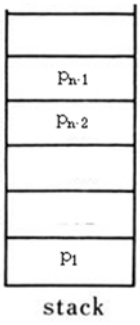
- △(p_{n+1}, $S[top]$, $S[top\text{-}1]$)＝逆時計回りまで

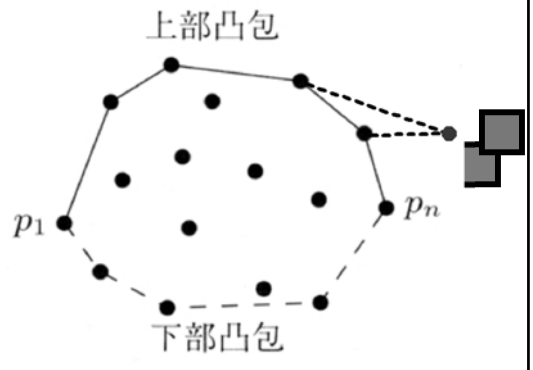




接線の求め方

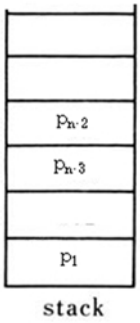
- △(p_{n+1}, $S[top]$, $S[top\text{-}1]$)＝逆時計回りまで

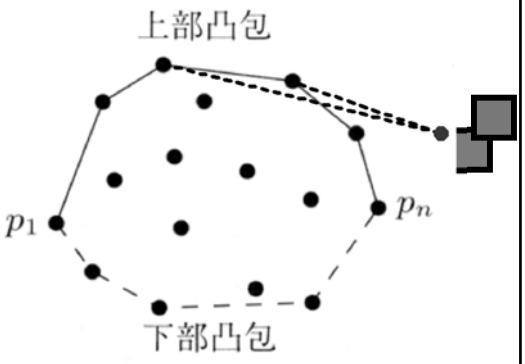




接線の求め方

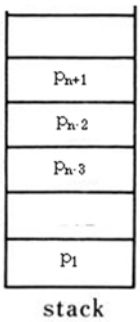
- △(p_{n+1}, $S[top]$, $S[top\text{-}1]$)＝逆時計回りまで

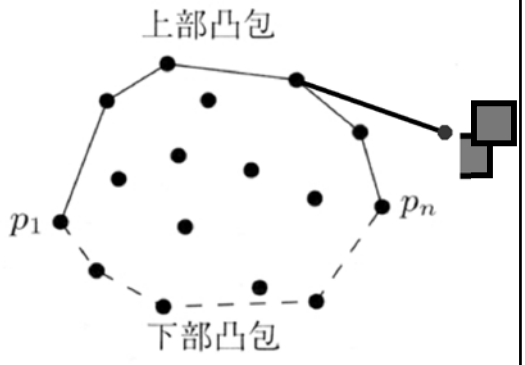




接線の求め方

- △(p_{n+1}, $S[top]$, $S[top\text{-}1]$)＝逆時計回りまで





アルゴリズム

IncrementalConvexHull(S_n)

- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：$\mathcal{CH}(S_n)$の頂点を含むスタックS

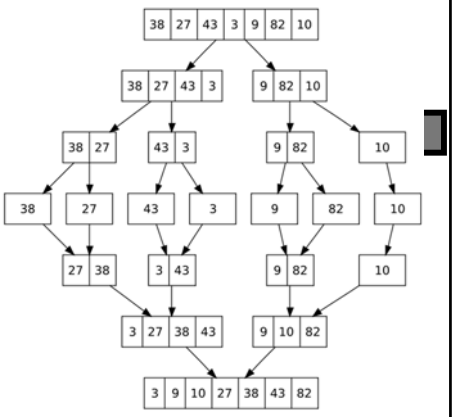
1. 点集をx座標で昇順に並び替える
2. 最初の3点p_0, p_1, p_2で凸包を構成する
3. p_0, p_1, $p_2 \rightarrow S$
4. for i=3 to n-1 do
5. while △(p_i, S[top], S[top-1])＝時計回り do
6. pop(S[top])
7. push(p_i)

計算量

- 点集合のデータ数＝n
- 点集合の並び替え＝$O(n\log n)$
- スタックへの点の追加と削除＝$O(n)$
- 総計算量＝$O(n\log n)+O(n)=O(n\log n)$

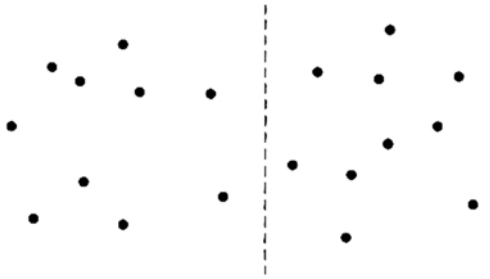
分割統治法(Divide and conquer)

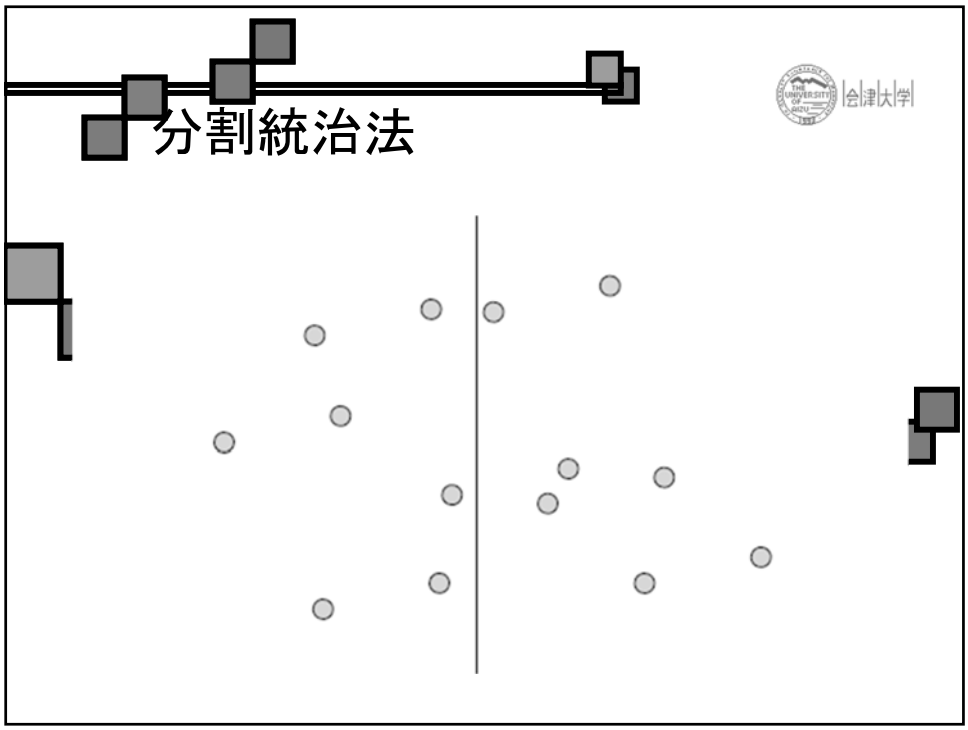
- 基本的な考え方
  1. 小さい問題に分割する（点集合の2等分）
  2. 再帰的に各部分を解く
  3. 各解答を統合して、元の問題に対する解答を得る

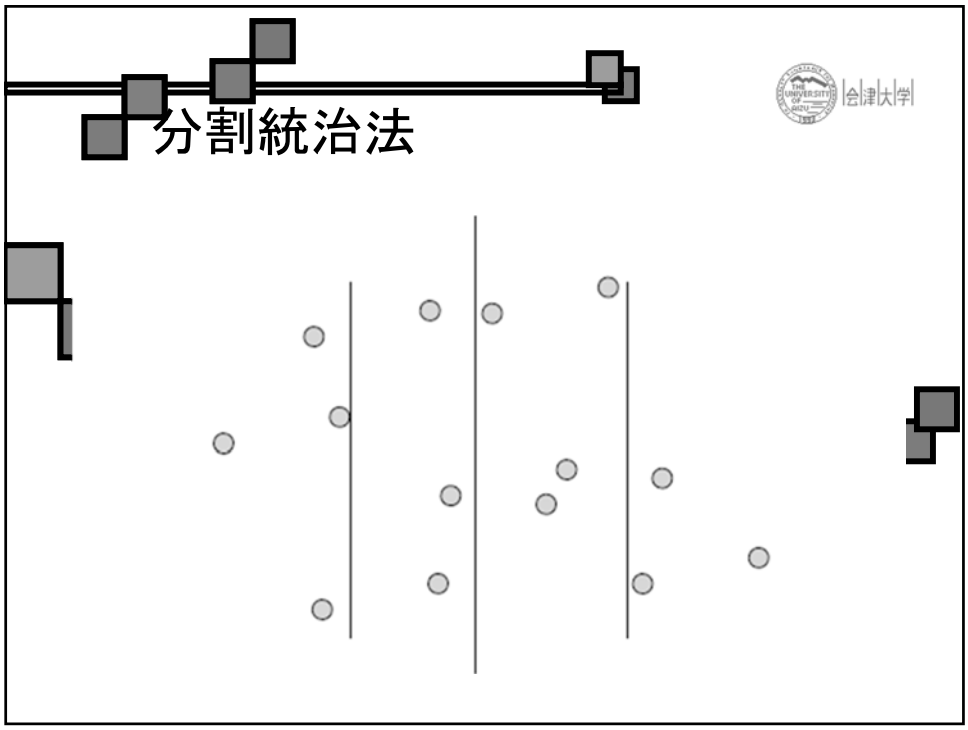


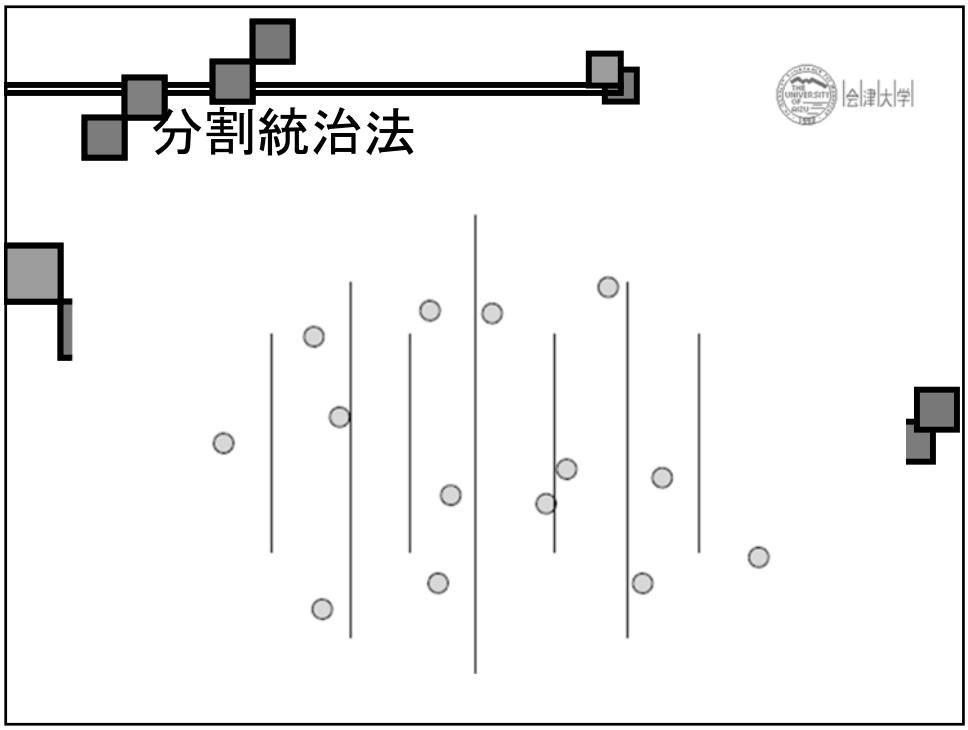
点集合の2等分

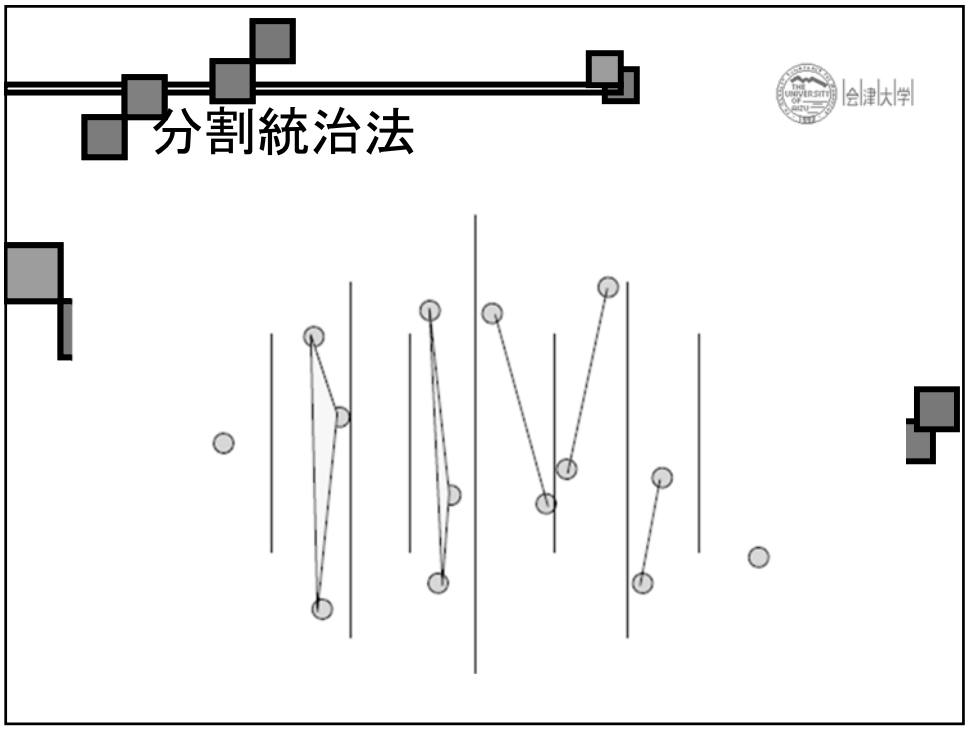
- 点集のx座標の昇順で2分割する
- 左右の部分で再帰的に凸包を求める
- 2つの凸包の共通外接線を求める
- 全体の点集合の凸包を構成する

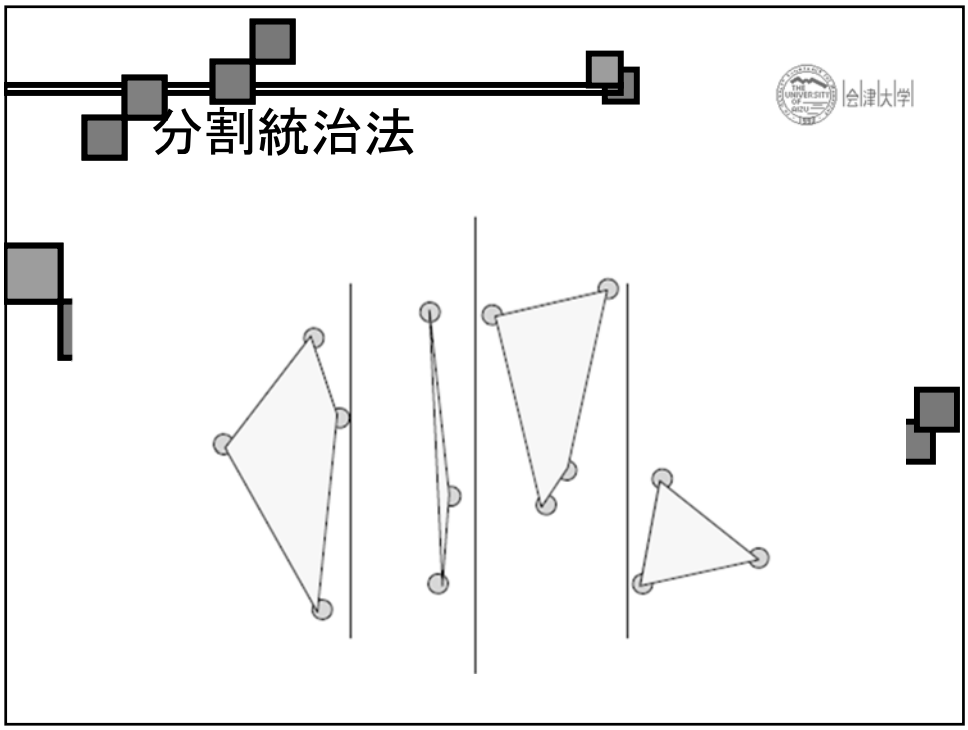


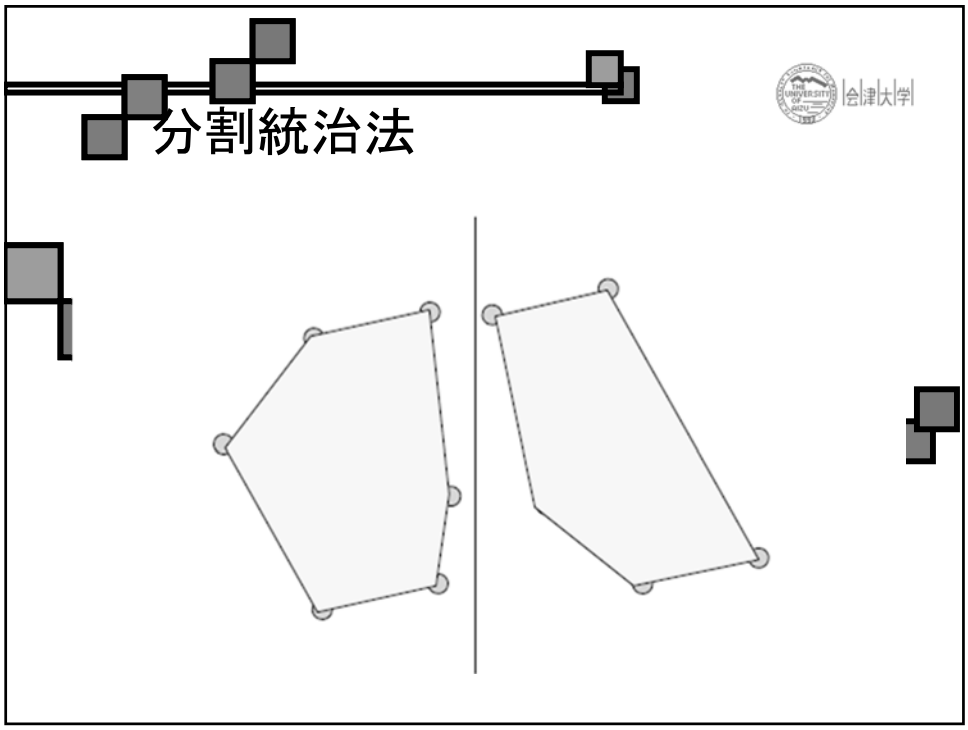

分割統治法
会津大学


分割統治法
会津大学

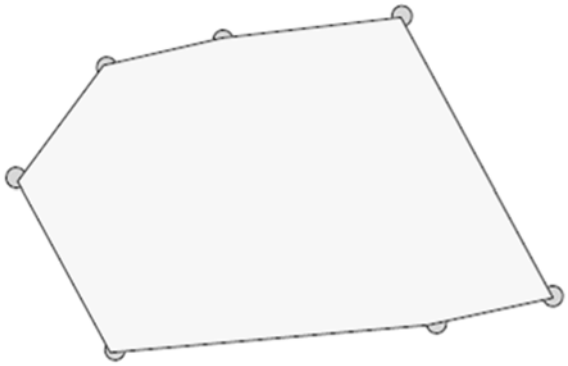

分割統治法
会津大学


分割統治法
会津大学

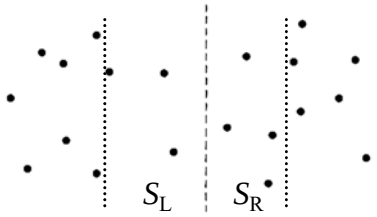

分割統治法


分割統治法

分割統治法



アルゴリズム



D&CConvexHull(S_n)

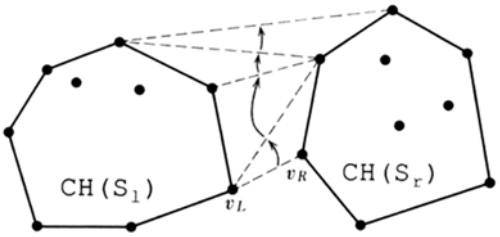
- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：$\mathcal{CH}(S_n)$の頂点を含むスタックS

1. 点集合S_nをx座標で昇順に並び替える
2. x座標の中央値を用いて左右の部分点集合S_LとS_Rに3点の小さい点集合まで分割する
3. S_LとS_Rに対する凸包を再帰的に求める
4. 上部・下部外接線を求め（？）、2つの凸包を統合する

上部外接線の計算

- 最も右と最も左の頂点を選ぶ
- while △(S_L[*top*], S_R[*top*], S_R[*top*-1])＝逆時計回り
- 　pop(S_R[*top*])
- while △(S_R[*top*], S_L[*top*], S_L[*top*-1])＝時計回り
- 　pop(S_L[*top*])

- 逐次添加法？
- 下部外接線？

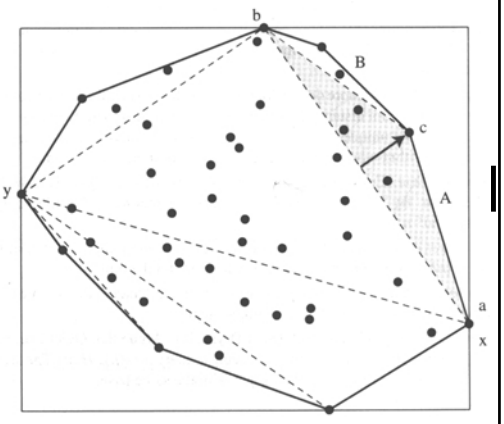


計算量

- 点集合のデータ数＝n
- 点集合の並び替え＝$O(n\log n)$
- 接線を求める計算量＝$O(n)$
- 再帰計算$T(n)=2T(n/2)+O(n)$
- $T(n)=2T(n/2)+bn$, $T(1)=b$
- $T(n)=2(2T(n/2^2)+bn/2)+bn$
- 　　$=2^2T(n/2^2)+2bn$
- .....$= 2^iT(n/2^i)+ibn$
- $n=2^i$、即ち$i=\log n$の時、$T(n)=nb+nb\log n$
- 総計算量＝$O(n\log n)$

Quick法(Quick method)

- Similar to Quick Sort
- 基本的な考え方
  - 2つ極点を見つける
    - 右端最低点x
    - 左端最高点y
  - Upper hullとLower hullに分けられる
  - 線分xyとの距離が一番遠い極点bを見つける
  - 線分abの右側の極点cを見つける
  - そして、再帰的に線分ac, 線分cbの極点を見つける

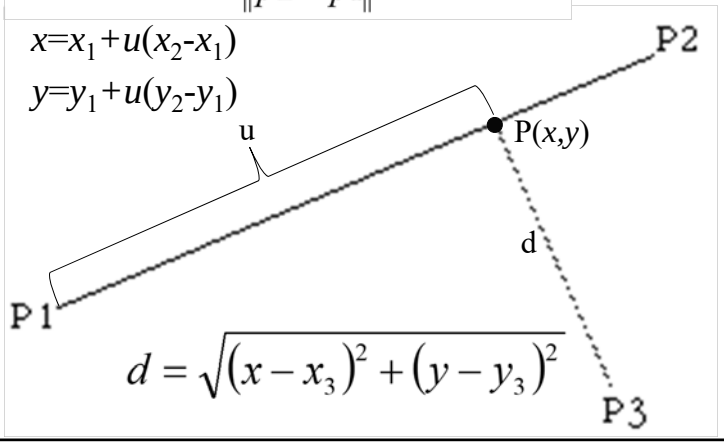


点と線分間の距離

$$u = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{\|p2 - p1\|^2}$$

$x = x_1 + u(x_2 - x_1)$

$y = y_1 + u(y_2 - y_1)$



$$d = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}$$

アルゴリズム

QuickConvexHull(S_n)

- 入力：平面上の点集合S_n
- 出力：$CH(S_n)$の頂点を含むリストL

1. 2つの極点、右端最低点x, 左端最高点yを見つける
2. S_nを上部点集S_uと下部点集S_lに分ける
3. $L = (x)$ + QuickHull(x, y, S_u) + (y) + QuickHull(y, x, S_l)

Function QuickHull(a, b, S)

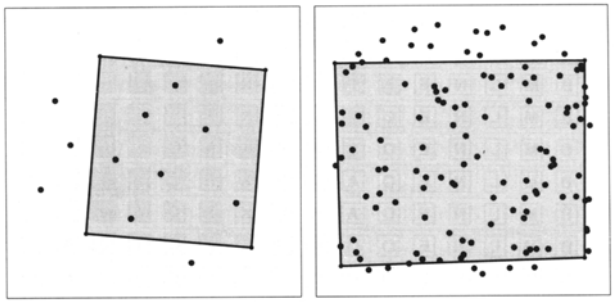
1. if S=empty then return;
2. else
3. c←線分abから最も離れる点
4. A←線分acの右側の点集
5. B←線分cbの右側の点集
6. return QuickHull(a, c, A)+(c)+QuickHull(c, b, B)

計算量

- 点集合のデータ数＝n
- 極点の探索＝$O(n)$
- 再帰計算$T(n)=T(n_1)+T(n_2)+O(n)$
  但し、$n_1+n_2<=n$
- 仮に$n_1 \approx n_2$, $T(n)=2T(n/2)+O(n)$
- 総計算量＝$O(n\log n)$

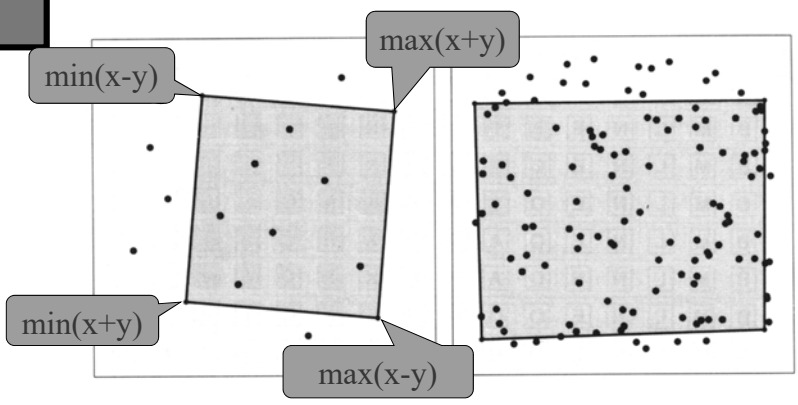
内点消去法(Inner points elimination)

- ある四角形の内部にあり、明らかに凸包頂点ではない点集を消去すると、考慮すべき点数↓↓ ！
- 四角形頂点の選択（？）と内点の判断（？）



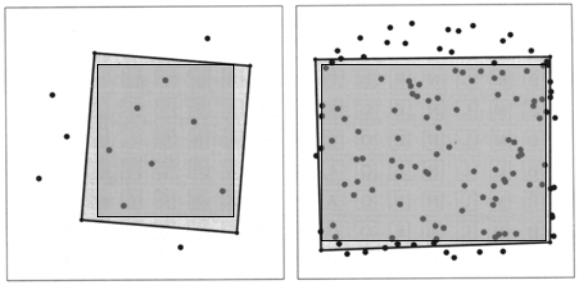
四角形頂点の選択

- 点集の分布に応じて選択できれば良い
- 均等分布であれば、下記の4点を選ぶ



内点の判断

- 各点が四角形の内部に入るかどうかを判断
- 座標軸に平行な長方形を用いれば、四角形頂点の座標のみから、内点を判断可能→直交領域探索



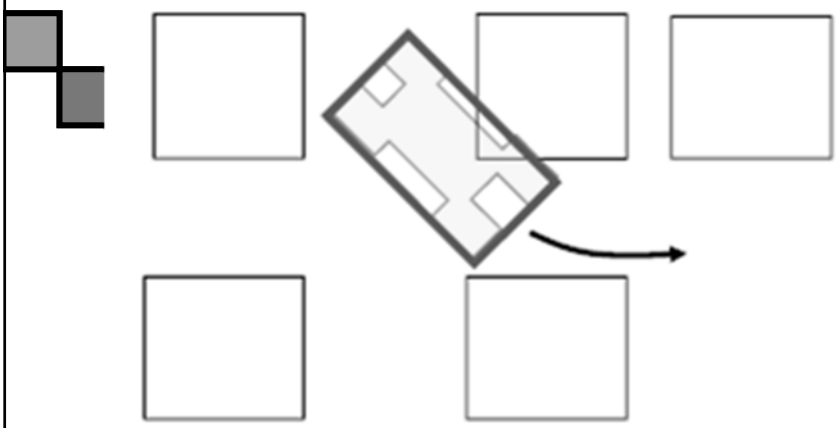
計算量

- 点集合のデータ数＝n
- 点集の並び替え＝$O(n\log n)$
- 点の位置判断（内外）＝$O(n)$
- 総計算量＝$O(n\log n)$

応用

- 経路選択
  - 路幅、高度制限のある道路、トンネルを通過できるかどうか
  - 障害物を回避できるかどうか
- 最小面積、最小体積
  - シリコンチップ（回路基板）、コンテナの選択
- 自動分類
  - 各クラスターの最小範囲、類別の境界定め

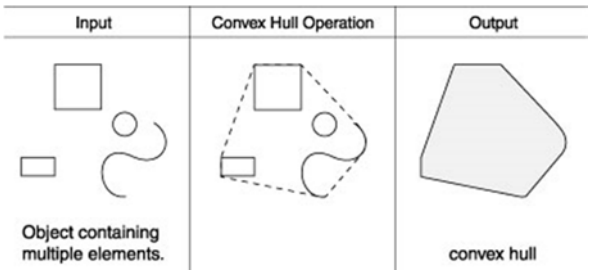
ロボット衝突判定



MapInfo

- Convex-Hull Function Example

  Returns the minimum boundary around a spatial object without the boundary being concave. The result is the spatial object representing the convex hull of the perimeter



ダンサー凸包